Instituto de Física - UFF
Mecânica Analítica - 1^oP/2012 - Prof. Daniel Jonathan
Lista de Exercícios 3 - teste na sexta, 27/04

1. Uma esfera de raio R rola sem deslizar sobre uma superfície plana. Se (x, y, R) são as coordenadas do centro da esfera, mostre que, em termos dos ângulos de Euler, as condições de rolamento sem deslizamento são

$$\dot{x} - R(\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\phi - \dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi) = 0; \qquad \dot{y} + R(\dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi) = 0$$

   Sugestão: dê uma olhada nas expressões de ω_x e ω_y em termos dos ângulos de Euler.

   Explique (pode ser em palavras, sem fazer contas) por que esse vínculos não são holônomos.

2. A equação de movimento de uma partícula num referencial girante com velocidade angular constante $\vec{\omega}$ é

$$m\vec{a} = \vec{F} - m\vec{a}_{o'} + 2m\vec{v}\times\vec{\omega} + m\vec{\omega}\times(\vec{r}\times\vec{\omega}),$$

   a) Se a força $\vec{F}$ é conservativa, mostre que esta equação de movimento resulta da lagrangiana

$$L = \frac{mv^2}{2} - V - m\vec{r}\cdot\vec{a}_{o'} + \frac{m}{2}(\vec{\omega}\times\vec{r})^2 + m\vec{v}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}),$$

   onde $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ e V é a energia potencial de $\vec{F}$.

   b) Obtenha a integral de Jacobi associada a esta lagrangiana no caso em que $\vec{a}_{o'}$ é constante e interprete o resultado obtido.

3. Uma partícula é disparada verticalmente da superfície da Terra com velocidade inicial v_0, atinge uma altura máxima e retorna ao solo.

   a) Calcule o desvio transverso provocado pela força de Coriolis durante esse movimento, usando as mesmas aproximações que fizemos para analisar o caso da queda livre a partir do repouso. Mostre que a deflexão total sofrida pela partícula até o momento em que ela atinge novamente o chão tem sentido oposto e é quatro vezes maior do que o desvio produzido quando ela é largada em repouso da mesma altura máxima.

   b) Explique em palavras por que a deflexão durante a descida nesse caso tem o sentido oposto do que a aquela sofrida no caso da queda a partir do repouso.

4. Seja $\mathcal{P}$ uma matriz de rotação de 180° em torno de um eixo arbitrário.

   a) Determine $\mathcal{P}^2$ sem cálculos, refletindo sobre seu significado.

   b) Sendo $\mathcal{A} = (\mathcal{I}+\mathcal{P})/2$ e $\mathcal{B} = (\mathcal{I}-\mathcal{P})/2$, onde $\mathcal{I}$ é a matriz identidade, prove que $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ e $\mathcal{B}^2 = \mathcal{B}$.

   c) Mostre que as matrizes $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são singulares (i.e., têm det = 0, ou equivalentemente possuem um autovetor com autovalor zero), e calcule o seu produto.

5. Uma partícula desliza sobre uma mesa horizontal sem atrito que gira com velocidade angular constante ω no sentido anti-horário.

   (a) Explique por que, vista de um referencial inercial, a partícula simplesmente segue uma linha reta.

   (b) Mostre, no entanto, que no referencial da mesa giratória as equações de movimento da partícula são

$$\ddot{x} = \omega^2 x + 2\omega\dot{y}, \quad \ddot{y} = \omega^2 y - 2\omega\dot{x}.$$

   Explique por que, sem efetuar nenhum cálculo, pode-se afirmar que a solução geral deste sistema de equações diferenciais é

$$x(t) = (A+Bt)\cos\omega t + (C+Dt)\,\mathrm{sen}\,\omega t,$$
$$y(t) = -(A+Bt)\,\mathrm{sen}\,\omega t + (C+Dt)\cos\omega t.$$

6. A expressão abaixo (eq. 4.1.2 do livro) é conhecida como 'fórmula de Rodrigues', e descreve explicitamente o operador $R_{\hat{n}}(\alpha)$ que representa uma rotação de um ângulo finito α ao redor do eixo $\hat{n}$:

$$R_{\hat{n}}(\alpha) = \cos\alpha \mathbb{1} + (1-\cos\alpha)\,\hat{n}\hat{n} + \operatorname{sen}\alpha\,\hat{n}\times\mathbb{1} \tag{1}$$

Deduzimos essa expressão em sala com um argumento geométrico. Vimos porém na seção 3.5 que é possível expressar formalmente esse mesmo operador como a exponencial de um operador de rotação *infinitesimal*, na forma $R_{\hat{n}}(\alpha) = \exp\left[\alpha\hat{n}\cdot\vec{J}\right]$, onde $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$ é o 'vetor de matrizes' formado pelos geradores infinitesimais. Vamos agora verificar que essas duas expressões de fato coincidem.

Dado um vetor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ numa dada base, seja V a matriz anti-simétrica correspondente (dada pela relação (3.4.11b) do livro-texto).

a) Verifique que V é a matriz do operador $\vec{v}\times\mathbb{1}$ (ou seja, que $V\vec{w} = \vec{v}\times\vec{w}$, para qualquer vetor $\vec{w}$).

b) Mostre que $V^2 = \vec{v}\times(\vec{v}\times\mathbb{1}) = \vec{v}\vec{v} - v^2\mathbb{1}$. Cheque então que $V^3 = -v^2 V$.

Dica: Você pode fazer o cálculo explicitamente, multiplicando as matrizes, ou então abstratamente, utilizando as propriedades de $\vec{v}\vec{v}$. Note também a semelhança da expressão para V^2 com a definição do tensor de inércia).

Conclua finalmente que

$$\begin{aligned} V^{2k+1} &= (-v^2)^k\, V, \quad \forall k \geq 0; \\ V^{2k} &= (-v^2)^{k-1}\, V^2, \quad \forall k \geq 1 \end{aligned} \tag{2}$$

c) Por definição, $\exp[V] = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{V^j}{j!}$. Usando a eq. (2) e as séries de Taylor para cos e sen, mostre que

$$\exp[V] = \mathbb{1} + \frac{\operatorname{sen}|v|}{|v|}\,V + \frac{1-\cos|v|}{v^2}\,V^2$$

d) Observando que $\alpha\hat{n}\cdot\vec{J}$ é justamente a matriz V correspondendo ao vetor $\vec{v} = \alpha\hat{n}$, e usando as expressões obtidas acima para os operadores V e V^2, obtenha a eq. (1).

7. Determine os eixos e momentos principais de inércia em relação ao vértice de um cone homogêneo de altura h e raio da base R. Sabendo que o centro de massa do cone encontra-se a uma distância $3h/4$ do vértice, obtenha os eixos e momentos principais de inércia em relação ao centro de massa.

8. O cubo do exemplo 4.6.1 do livro é posto a girar em torno da aresta que coincide com o eixo z. Determine o vetor momento angular do cubo e o ângulo que ele faz com o vetor velocidade angular.